УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 150, кн. 3 Физико-математические науки *2008*

УДК 517.925.5

ПОСТРОЕНИЕ НЕАВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО ЗАДАННОЙ СОВОКУПНОСТИ ЧАСТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

О.В. Ибушева, Р.Г. Мухарлямов

Аннотация

Предлагается метод построения неавтономной системы дифференциальных уравнений по заданному интегральному многообразию. Определяются условия устойчивости решений системы по отношению к множествам решений. Рассматривается задача построения неавтономной системы дифференциальных уравнений второго порядка по заданным частным решениям на плоскости.

Ключевые слова: неавтономная система дифференциальных уравнений, частный интеграл, условие устойчивости.

Введение

Задача построения системы дифференциальных уравнений по заданному интегральному многообразию рассмотрена в [1–3]. В частности, в [1] строится автономная система дифференциальных уравнений, имеющая заданную интегральную кривую на плоскости. В [2] рассматривается задача построения множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданные интегральные многообразия, методом, предложенным в [1], и определяется конструкция систем из условия устойчивости этих многообразий. В [3] построена автономная система дифференциальных уравнений по заданному распределению фазовых траекторий на плоскости, определены коэффициенты, предусмотренные в конструкции системы, исходя из вида интегральных кривых и особых точек.

В данной работе предложен метод построения неавтономной системы дифференциальных уравнений по заданной совокупности частных интегралов в многомерном фазовом пространстве, определена структура системы из условий устойчивости решений относительно заданных интегральных многообразий. Рассмотрена задача построения неавтономной системы второго порядка, имеющей своими частными решениями заданные «подвижные» кривые.

1. Определение структуры неавтономной системы дифференциальных уравнений в многомерном пространстве

Пусть в некоторой области G фазового пространства R_n переменных $x_1, \ldots, x_n$ уравнениями
$$\omega_i(x(t), t) = 0, \quad i = 1, \ldots, r, \tag{1.1}$$

заданы «подвижные» гиперповерхности. Будем предполагать, что при любом t функции $\omega_i(x,t)$ всюду в области G непрерывны и обладают непрерывными частными производными $\dfrac{\partial\omega_i}{\partial x_j}$, $\dfrac{\partial\omega_i}{\partial t}$, $j=1,\dots,n$. Требуется построить систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=X(x,t),\quad x\in R_n, \tag{1.2}$$

имеющую заданные функции $\omega_i(x,t)$ своими частными интегралами.

Введем в рассмотрение функцию $\omega(x,t)$, представляющую собой произведение $r+2$ функций

$$\omega=\omega_0\,\omega_1\cdots\omega_r\,\omega_{r+1}.$$

Здесь $\omega_0\equiv 1$. Уравнения $\omega_s(x,t)=0$ при $s=1,\dots,p$ равносильны уравнениям «подвижных» поверхностей, допускающих бесконечно малый высший предел в смысле работы [4]. Уравнения $\omega_l(x,t)=0$ при $l=p+1,\dots,q$ соответствуют «перемещающимся» поверхностям, имеющим общие части $M(t)$. Предполагается, что многообразие $M(t)$ обладает компактной окрестностью [4]. Равенства $\omega_h(x,t)=0$ при $h=q+1,\dots,r$ определяют «подвижные» поверхности и разделяют области, заполненные траекториями разных типов. «Подвижные» сепаратрисы $\omega_h(x,t)=0$ не имеют общих точек с поверхностями $\omega_s(x,t)=0$ и многообразием $M(t)$; $\omega_{r+1}\equiv 1$.

Тогда каждая функция $\omega_i(x,t)=0$ $(i=1,\dots,r)$ представляет собой частный интеграл системы (1.2), если выполняется равенство

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{\partial\omega}{\partial x}X(x,t)+\frac{\partial\omega}{\partial t}=F(\omega,x,t),$$

и $F(\omega,x,t)$ обращается в нуль при выполнении условий $\omega_i(x,t)=0$ для всех $i=1,\dots,r$.

Общая структура систем дифференциальных уравнений, допускающих частные интегралы (1.1), определяется в виде [5]

$$\frac{dx_j}{dt}=P_j(x,t)+Q(x,t)\left(\sum_{k=1}^{j-1}\frac{\partial\omega}{\partial x_k}-\sum_{k=j+1}^{n}\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\right)-\frac{\dfrac{\partial\omega}{\partial x_j}\dfrac{\partial\omega}{\partial t}}{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{\partial\omega}{\partial x_k}\right)^2}, \tag{1.3}$$

где $Q(x,t)$ – произвольная непрерывная функция, $P_j(x,t)$ – непрерывные функции, обращающиеся в нуль вдоль поверхностей (1.1) и определенные в виде

$$P_j(x,t)=P(x,t)\omega_1\cdots\omega_p\sum_{i=1}^{q}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}^{(i)}\frac{\partial\omega_i}{\partial x_k}\omega_0\,\omega_1\cdots\omega_{i-1}\,\omega_{i+1}\cdots\omega_r\,\omega_{r+1}, \tag{1.4}$$

где $P(x,t)$ – произвольная непрерывная функция, $\alpha_{jk}^{(i)}$ $(j,k=1,\dots,n, i=1,\dots,q)$ – произвольные коэффициенты.

Каждая функция $\omega_i(x,t)$ $(i=1,\dots,r)$ является частным интегралом системы (1.3). Доказательство этого утверждения приведено в [5].

2. Определение условий устойчивости

Покажем, что выбором коэффициентов $\alpha_{sk}^{(j)}$, введенных в выражения (1.4), «подвижную» поверхность, определяемую уравнением $\omega_s(x,t)=0$ $(s=1,\dots,p)$, можно сделать устойчивой или неустойчивой. Для этого составим функцию Ляпунова

$$V_s=\frac{1}{2}\big[\omega_s(x,t)\big]^2$$

и вычислим ее производную с учетом (1.3), (1.4)

$$\frac{dV_s}{dt} = \omega_s \frac{d\omega_s}{dt} = \lambda_s(x,t)\omega_s^2 + \Omega_s^{(3)}, \tag{2.1}$$

где

$$\lambda_s(x,t) = P(x,t)\omega_1 \cdots \omega_{s-1}\,\omega_{s+1} \cdots \omega_p \omega_{(s)} \sum_{j=1}^{n} \omega_{sj} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}^{(s)} \omega_{sk} - \frac{1}{\omega_{(s)}} \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq s}}^{r} \omega_{(is)}\omega_{it} +$$

$$+ Q(x,t) \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq s}}^{r} \omega_{(is)} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} (\omega_{ij}\omega_{sk} - \omega_{sj}\omega_{ik}) + \frac{\omega_{st}}{\omega_{(s)} \sum\limits_{k=1}^{n} \omega_{sk}^2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq s}}^{r} \omega_{(is)}\omega_{ij}\omega_{sj},$$

$$\omega_{(i)} = \omega_0\,\omega_1 \cdots \omega_{i-1}\,\omega_{i+1} \cdots \omega_r\,\omega_{r+1}, \quad \omega_{sj} = \frac{\partial \omega_s}{\partial x_j},\ \omega_{st} = \frac{\partial \omega_s}{\partial t},$$

$\Omega_s^{(3)}$ – совокупность членов, содержащих множитель ω_s в степени не ниже третьей.

Из выражения (2.1) видно, что судить об устойчивости интегральной поверхности $\omega_s = 0$ можно по знаку выражения $\lambda_s(x,t)$. Если функции $P(x,t)$, $Q(x,t)$ и коэффициенты $\alpha_{jk}^{(s)}$ в выражении $\lambda_s(x,t)$ выбрать так, чтобы выполнялось условие $\lambda_s(x,t) < 0$, то производная $\dfrac{dV_s}{dt}$ будет знакопостоянной отрицательной функцией всюду в ε-окрестности поверхности $\omega_s = 0$. Функция V_s является определенно положительной всюду в ε-окрестности поверхности $\omega_s = 0$. Следовательно, выполнены условия теоремы об устойчивости интегрального многообразия [4], и «подвижная» интегральная поверхность $\omega_s = 0$ будет устойчива.

Если произвольная функция $\lambda_s(x,t)$ является непрерывной и ограниченной при всех $t \geq t_0$, то при выполнении условия $\lambda_s(x,t) < 0$ производная $\dfrac{dV_s}{dt}$ является определенно отрицательной функцией. Учитывая, что функция V_s ограничена, допускает бесконечно малый высший предел и является определенно положительной всюду в ε-окрестности поверхности $\omega_s = 0$, то удовлетворяются условия асимптотической устойчивости многообразия [4] и интегральная поверхность $\omega_s = 0$ будет устойчива асимптотически.

Пусть теперь коэффициенты $\alpha_{jk}^{(s)}$ выбраны так, что

$$\lambda_s(x,t) \geq \nu_s > 0,$$

где ν_s – некоторая постоянная. Тогда производная $\dfrac{dV_s}{dt}$ может быть представлена в виде

$$\frac{dV_s}{dt} = 2\nu_s V_s + \Omega_s,$$

где $\Omega_s = (\lambda_s(x,t) - \nu_s)\omega_s^2 + \Omega_s^{(3)}$ – знакопостоянная положительная в ε-окрестности поверхности $\omega_s = 0$ функция. Так как функция V_s является ограниченной и ее знак совпадает со знаком функции Ω_s в ε-окрестности поверхности $\omega_s = 0$, то выполнены условия неустойчивости многообразия [4], и рассматриваемая интегральная поверхность $\omega_s = 0$ является неустойчивой.

В случае, если поверхности $\omega_l(x,t) = 0$ $(l = p+1, \ldots, q)$ имеют общую часть $M(t)$, то соответствующим выбором функций $P(x,t)$, $Q(x,t)$ и коэффициентов

$\alpha_{jk}^{(s)}$ многообразие $M(t)$ можно сделать устойчивым или неустойчивым. Для этого составим функцию Ляпунова V в виде квадратичной формы

$$V_M = \frac{1}{2} \sum_{m,l=p+1}^{q} \mu_{m,l}\, \omega_m\, \omega_l,$$

где коэффициенты $\mu_{m,l} = \mu_{l,m}$ выбираются в соответствии с условиями Сильвестра для положительной определенности V_M:

$$\mu_{p+1,p+1} > 0, \ \begin{vmatrix} \mu_{p+1,p+1} & \mu_{p+1,p+2} \\ \mu_{p+2,p+1} & \mu_{p+2,p+2} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \ \begin{vmatrix} \mu_{p+1,p+1} & \cdots & \mu_{p+1,q} \\ \mu_{p+2,p+1} & \cdots & \mu_{p+2,q} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_{q,p+1} & \cdots & \mu_{q,q} \end{vmatrix} > 0. \tag{2.2}$$

Производная функции V_M примет вид

$$\frac{dV_M}{dt} = \sum_{m,l=p+1}^{q} \mu_{m,l}\, \omega_m \frac{d\omega_l}{dt}.$$

Запишем производную $\dfrac{d\omega_l}{dt}$ в виде

$$\frac{d\omega_l}{dt} = P(x,t)\omega_1 \cdots \omega_p \omega_{(l)} \sum_{j=1}^{n} \omega_{lj} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}^{(l)} \omega_{lk} + \lambda_l \omega_l + \Omega_l^{(2)}, \tag{2.3}$$

где

$$\lambda_l(x,t) = P(x,t)\omega_1 \cdots \omega_p \sum_{\substack{i=1\\ i\neq l}}^{q} \omega_{(il)} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}^{(i)} \omega_{ik}\omega_{lj} - \frac{1}{\omega_{(l)}} \sum_{\substack{i=1\\ i\neq l}}^{r} \omega_{(il)}\omega_{it} +$$
$$+ Q(x,t) \sum_{\substack{i=1\\ i\neq l}}^{r} \omega_{(il)} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} (\omega_{ij}\omega_{lk} - \omega_{lj}\omega_{ik}) + \frac{\omega_{lt}}{\omega_{(l)} \sum\limits_{k=1}^{n} \omega_{lk}^2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{i=1\\ i\neq l}}^{r} \omega_{(il)}\omega_{ij}\omega_{lj},$$

$\Omega_l^{(2)}$ – совокупность членов, содержащих множитель ω_l в степени не ниже второй.

Если неизвестные коэффициенты $\alpha_{jk}^{(l)}$ подчинить условиям

$$\alpha_{jj}^{(l)} = 0, \ \alpha_{jk}^{(l)} = -\alpha_{kj}^{(l)}, \tag{2.4}$$

то первое слагаемое в правой части соотношения (2.3) будет равно нулю. Тогда с учетом (2.3), (2.4) производная $\dfrac{dV_M}{dt}$ запишется в виде

$$\frac{dV_M}{dt} = \sum_{m,l=p+1}^{q} \lambda_l\, \mu_{m,l}\, \omega_m\, \omega_l + \Omega_M^{(3)}, \tag{2.5}$$

где $\Omega_M^{(3)} = \sum\limits_{m,l=p+1}^{q} \mu_{m,l}\, \omega_m\, \Omega_l^{(2)}$.

Для обеспечения отрицательной определенности первого слагаемого выражения (2.5) с учетом (2.2) необходимо функции $\lambda_l(x,t)$ $(l = p+1, \ldots, q)$ подчинить условиям

$$\lambda_{p+1} < 0, \quad \lambda_{p+1}\lambda_{p+2} > 0, \quad \lambda_{p+1}\lambda_{p+2}\lambda_{p+3} < 0, \ \ldots, \quad \lambda_{p+1}\lambda_{p+2}\cdots\lambda_q > (<)0.$$

Таким образом, функция V_M является определенно положительной в силу (2.2), при $\lambda_l < 0$ $(l = p+1, \ldots, q)$ обладает знакопостоянной отрицательной производной, следовательно, «подвижное» многообразие $M(t)$ является устойчивым. Если хотя бы одно $\lambda_l > 0$, то многообразие $M(t)$ неустойчиво.

3. Пример

Необходимо построить систему дифференциальных уравнений, обеспечивающую движение из произвольной точки пространства XOY к движущейся точке, образованной пересечением прямых $x = -k_1 t$ и $y = 0$, с обходом двух препятствий, уравнения движения которых заданы в виде

$$\begin{gathered} (x-2+k_2t)^2 + 4y^2 = 1, \\ \frac{1}{4}(x+1-k_3t)^2 + \frac{16}{9}\left(y+\frac{3}{2}\right)^2 = 1. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Частными интегралами искомой системы являются функции

$$\begin{aligned} &\omega_1(x,y,t) \equiv x + k_1 t = 0, \quad \omega_2(x,y,t) \equiv y = 0, \\ &\omega_3(x,y,t) \equiv \frac{1}{2}\Big((x-2+k_2t)^2 + 4y^2 - 1\Big) = 0, \\ &\omega_4(x,y,t) \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}(x+1-k_3t)^2 + \frac{16}{9}\left(y+\frac{3}{2}\right)^2 - 1\right) = 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Функция ω примет вид $\omega = \omega_1\omega_2\omega_3\omega_4$.

Система уравнений (1.3) с учетом (1.4) при $n = 2$ запишется в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -Q(x,y,t)\dfrac{\partial\omega}{\partial y} - \dfrac{\dfrac{\partial\omega}{\partial x}\dfrac{\partial\omega}{\partial t}}{\left(\dfrac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2} + \\ \quad + P(x,y,t)\left[\left(\alpha_{11}^{(1)}\dfrac{\partial\omega_1}{\partial x} + \alpha_{12}^{(1)}\dfrac{\partial\omega_1}{\partial y}\right)\omega_2\omega_3\omega_4 + \omega_1\left(\alpha_{11}^{(2)}\dfrac{\partial\omega_2}{\partial x} + \alpha_{12}^{(2)}\dfrac{\partial\omega_2}{\partial y}\right)\omega_3\omega_4\right], \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x,y,t)\dfrac{\partial\omega}{\partial x} - \dfrac{\dfrac{\partial\omega}{\partial y}\dfrac{\partial\omega}{\partial t}}{\left(\dfrac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2} + \\ \quad + P(x,y,t)\left[\left(\alpha_{21}^{(1)}\dfrac{\partial\omega_1}{\partial x} + \alpha_{22}^{(1)}\dfrac{\partial\omega_1}{\partial y}\right)\omega_2\omega_3\omega_4 + \omega_1\left(\alpha_{21}^{(2)}\dfrac{\partial\omega_2}{\partial x} + \alpha_{22}^{(2)}\dfrac{\partial\omega_2}{\partial y}\right)\omega_3\omega_4\right]. \end{cases}$$

Далее, учитывая, что

$$\begin{array}{llll} \dfrac{\partial\omega_1}{\partial x} = 1, & \dfrac{\partial\omega_2}{\partial x} = 0, & \dfrac{\partial\omega_3}{\partial x} = x - 2 + k_2 t, & \dfrac{\partial\omega_4}{\partial x} = \dfrac{1}{4}(x+1-k_3t), \\ \dfrac{\partial\omega_1}{\partial y} = 0, & \dfrac{\partial\omega_2}{\partial y} = 1, & \dfrac{\partial\omega_3}{\partial y} = 4y, & \dfrac{\partial\omega_4}{\partial y} = \dfrac{16}{9}(y+\dfrac{3}{2}), \\ \dfrac{\partial\omega_1}{\partial t} = k_1, & \dfrac{\partial\omega_2}{\partial t} = 0, & \dfrac{\partial\omega_3}{\partial t} = k_2(x-2+k_2t), & \dfrac{\partial\omega_4}{\partial t} = -\dfrac{1}{4}k_3(x+1-k_3t), \end{array}$$

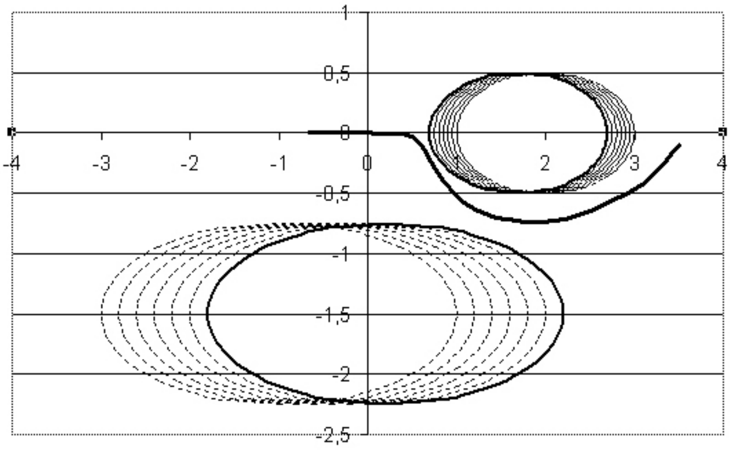

Рис. 1

представим систему уравнений в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x,y,t)\big(\alpha_{11}^{(1)}\omega_2 + \alpha_{12}^{(2)}\omega_1\big)\omega_3\omega_4 - Q(x,y,t)a - bcd, \\ \dfrac{dy}{dt} = P(x,y,t)\big(\alpha_{21}^{(1)}\omega_2 + \alpha_{22}^{(2)}\omega_1\big)\omega_3\omega_4 + Q(x,y,t)b - acd. \end{cases} \tag{3.3}$$

Здесь

$$\begin{aligned} &a = \omega_1\omega_3\omega_4 + 4y\omega_1\omega_2\omega_4 + \frac{16}{9}\left(y + \frac{3}{2}\right)\omega_1\omega_2\omega_3, \\ &b = \omega_2\omega_3\omega_4 + (x - 2 + k_2 t)\omega_1\omega_2\omega_4 + \frac{1}{4}(x + 1 - k_3 t)\omega_1\omega_2\omega_3, \\ &c = k_1\omega_2\omega_3\omega_4 + k_2(x - 2 + k_2 t)\omega_1\omega_2\omega_4 - \frac{1}{4}k_3(x + 1 - k_3 t)\omega_1\omega_2\omega_3, \\ &d = (a^2 + b^2)^{-1}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Полагая $P = 2$, $Q = 1$, $\lambda_{12} = -2$, $\lambda_{21} = -1$, определим значения коэффициентов $\alpha_{11}^{(1)}$, $\alpha_{12}^{(2)}$, $\alpha_{21}^{(1)}$, $\alpha_{22}^{(2)}$ в соответствии с методом, изложенным в [3]:

$$\alpha_{11}^{(1)} = \alpha_{22}^{(2)} = 0, \quad \alpha_{12}^{(2)} = \frac{23}{78}, \quad \alpha_{21}^{(1)} = -\frac{71}{78}.$$

Подстановкой значений P, Q и коэффициентов $\alpha_{11}^{(1)}$, $\alpha_{12}^{(2)}$, $\alpha_{21}^{(1)}$, $\alpha_{22}^{(2)}$ в (3.3) можно получить окончательный вид системы:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{16}{39}\omega_1\omega_3\omega_4 - 4y\omega_1\omega_2\omega_4 - \dfrac{16}{9}(y + \dfrac{3}{2})\omega_1\omega_2\omega_3 - bcd, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{32}{39}\omega_2\omega_3\omega_4 + (x - 2 + k_2 t)\omega_1\omega_2\omega_4 + \dfrac{1}{4}(x + 1 - k_3 t)\omega_1\omega_2\omega_3 - acd, \end{cases} \tag{3.5}$$

где ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 и a, b, c, d определяются выражениями (3.2) и (3.4) соответственно.

Построение и решение системы дифференциальных уравнений проводилось с помощью интегрированной системы компьютерной символьной математики Maple. Результат численного эксперимента при $k_1 = 0.7$, $k_2 = 0.1$, $k_3 = 0.4$ и начальных условиях $(0, 3.5, -0.1)$ приведен на рис. 1. Решение системы (3.5) представлено на рис. 1 в виде кривой, огибающей два препятствия, уравнения движений которых заданы в (3.1).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 06-01-00664) и Министерства образования и науки РФ.

Summary

O.V. Ibusheva, R.G. Mukharlyamov. Construction of Non-Autonomous System of Differential Equations on Given Particular Integrals in Multidimentional Space.

The present paper proposes a method of constructing non-autonomous system of differential equations with given properties of particular solutions. The conditions of stability of the set of system's solutions are defined. The problem of constructing non-autonomous two-order system of differential equations on given particular solution is considered.

Key words: non-autonomous system of differential equations, particular solution, stability condition.

Литература

1. *Еругин Н.П.* Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // ПММ. – 1952. – Т. XVI. – С. 659–670.
2. *Мухарлямов Р.Г.* Построение множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданные интегралы // Дифференц. уравнения. – 1967. – Т. 3, № 2. – С. 180–192.
3. *Мухарлямов Р.Г.* К обратным задачам качественной теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1967. – Т. 3, № 10. – С. 1674–1681.
4. *Мухарлямов Р.Г.* О построении множества систем дифференциальных уравнений устойчивого движения по интегральному многообразию // Дифференц. уравнения. – 1969. – Т. 5, № 4. – С. 688–699.
5. *Ибушева О.В.* О построении неавтономной системы дифференциальных уравнений, имеющей заданное интегральное многообразие // Актуальные проблемы современной науки: Труды 3-го Междунар. форума (8-й междунар. конф. молодых ученых и студентов). Естественные науки. Части 1, 2: Математика. Математическое моделирование. – Самара: Изд-во СамГТУ, 2007. – С. 33–36.

Поступила в редакцию
28.05.08

Ибушева Олеся Владимировна – старший преподаватель цикла ИТ при кафедре автоматизации технологических процессов и производств, Нижнекамский химико-технологический институт.

E-mail: *ibusheva_ov@mail.ru*

Мухарлямов Роберт Гарабшевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики Российского университета дружбы народов, г. Москва.

E-mail: *rmuharliamov@sci.pfu.edu.ru*